MAT 132 Lineer Cebir - II. Vize

Dr. Aydın Kızılkaya
Arş. Grv. Adem Ükte

02.05.2007
Süre: 90 dk

SORULAR

S.1. Doğrusal denklem sistemi $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ile ilgili olarak,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -7 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Denklem sisteminin homojen, özel ve tam çözümlerini elde ediniz. (**15p**)
(b) **A** matrisinin rank'ı nedir? Niçin, açıklayınız? (**5p**)
(c) **A** matrisinin dört temel alt uzayının boyutlarını veriniz. (**5p**)
(d) **A** matrisinin sıfır ve sol sıfır uzaylarını tanımlayınız. (**5p**)
(e) **A** matrisinin dört temel alt uzayının bazlarını bulunuz. (**10p**)

S.2. t = {1, 2, 3} anlarında ölçülen örnek değerleri sırasıyla b = {–1, 3, 4} olduğuna göre,

(a) En küçük kareler yaklaşımı ile bu ölçümlere en iyi uyan doğru denklemi $\hat{b} = C + Dt$ 'yi tanımlayınız. (**15p**)

(b) **(a)**'da bulduğunuz doğru denklemini kullanarak b değerlerinin en küçük kareler yaklaşığı olan $\hat{b}$ değerlerini elde ediniz ve hata vektörünü bulunuz. Tüm sonuçları aynı grafik üzerinde veriniz. (**5p**)

S.3. Aşağıda verilen **A** matrisinin determinantını ve rank'ını bulunuz. Bu matrisin satır ve sütunları lineer bağımsız mıdır? Nedenini açıklayınız. (**15p**)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

S.4. Aşağıdaki **A** matrisi ile ilgili olarak

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) **A** matrisini, **A** = **LU** biçiminde çarpanlarına ayırınız. (**10p**)

(b) **A** matrisinin determinantını ve tersini <u>kofaktör bileşenlerini bularak</u> elde ediniz. (**15p**)

Dr. Aydın KIZILKAYA
Arş. Gör. Adem ÜKTE

02.05.2007

MAT 132 LİNEER CEBİR

II. VİZE SINAV SORULARININ CEVAPLARI

1)
$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&2&1\\-1&-2&1&1&0\\1&2&-3&-7&-2\end{bmatrix}_{m\times n},\qquad b=\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}m=3\\n=5\end{matrix}$$

15p a) Genişletilmiş A matrisi oluşturulup yok etme işlemi uygulanırsa,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&0&2&1&2\\-1&-2&1&1&0&-1\\1&2&-3&-7&-2&-1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{YOK ETME}]{\substack{(2.\text{satır})+(1.\text{satır})\\(3.\text{satır})-(1.\text{satır})}}\left[\begin{array}{ccccc|c}\boxed{1}&2&0&2&1&2\\0&0&\boxed{1}&3&1&1\\0&0&-3&-9&-3&-3\end{array}\right]\xrightarrow[\text{YOK ETME}]{(3.\text{satır})+3(2.\text{satır})}\left[\begin{array}{ccccc|c}\boxed{1}&2&0&2&1&2\\0&0&\boxed{1}&3&1&1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

Bu durumda $Ax=b$ sistemi

$$\underbrace{\begin{array}{ccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline \boxed{1}&2&0&2&1\\0&0&\boxed{1}&3&1\\0&0&0&0&0\end{array}}_{A'}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}}_{c}$$

Burada, $x_1, x_3 \longrightarrow$ PİVOT DEĞİŞKENLERİ

$x_2, x_4, x_5 \longrightarrow$ SERBEST DEĞİŞKENLER

olur. Bu sistemin homojen çözümü, $A'x=0$ sisteminin çözümü ile elde edilir.

$$\begin{array}{ccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline \boxed{1}&2&0&2&1\\0&0&\boxed{1}&3&1\\0&0&0&0&0\end{array}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad \begin{array}{lll}x_3+3x_4+x_5=0&\Rightarrow&x_3=-3x_4-x_5\\x_1+2x_2+2x_4+x_5=0&\Rightarrow&x_1=-2x_2-2x_4-x_5\end{array}$$

Buna göre $Ax=b$ sisteminin homojen çözümü,

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}_H=x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\0\\-3\\1\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$Ax=b$ sisteminin özel çözümünü bulmak için $A'x=c$ sisteminde serbest değişkenler SIFIR olarak alınır. Buna göre,

$$\begin{array}{ccccc}x_1&x_2&x_3&x_4&x_5\\\hline \boxed{1}&2&0&2&1\\0&0&\boxed{1}&3&1\\0&0&0&0&0\end{array}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{lll}x_3+3\underset{0}{x_4}+\underset{0}{x_5}=1&\Rightarrow&x_3=1\\x_1+2\underset{0}{x_2}+2\underset{0}{x_4}+\underset{0}{x_5}=2&\Rightarrow&x_1=2\end{array}\right\}\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}_{ö}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{Ax=b\text{ sisteminin özel çözümü}}$$

Sonuç olarak, $Ax=b$ sisteminin tam çözümü;

$$x = x_{\text{ö}} + x_H \text{ 'den}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ olarak elde edilir.

5p b) PİVOT DEĞİŞKENLER'inin sayısı A matrisinin rank'ına eşit olacaktır.

Buna göre, $r = \text{rank}(A) = 2$ 'dir.

5p c) A matrisinin DÖRT TEMEL ALT UZAYI,

- Satır uzayı, boyutu $\longrightarrow$ $R(A^T) = r = 2$ 'dir. (Pivot değişkenlerin sayısı)
- Sütun uzayı, boyutu $\longrightarrow$ $R(A) = r = 2$ 'dir.
- Sıfır uzayı, boyutu $\longrightarrow$ $R(N) = n-r = 5-2 = 3$ 'dür. (Serbest değ. sayısı)
- Sol sıfır uzayı, boyutu $\longrightarrow$ $R(N^T) = m-r = 3-2 = 1$ 'dir.

5p d) A matrisinin sıfır uzayı, $Ax=0$ sisteminin çözümü olan x olup bu aynı zamanda $Ax=b$ sisteminin homojen çözümüne denktir.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{A matrisinin sıfır uzayı.}$$

A matrisinin sol sıfır uzayı için $A^T y = 0$ sisteminin çözümü yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{YOK ETME}]{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

- $y_2 - 3y_3 = 0 \Rightarrow y_2 = 3y_3$
- $y_1 - y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_1 = 2y_3$

Sonuç olarak A matrisinin sol sıfır uzayını veren y çözümleri,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$ olacaktır.

(10p) e) A matrisinin dört temel alt uzayının bazları :

- Satır uzayının bazları;

$r_1 = [1 \; 2 \; 0 \; 2 \; 1]$ ve $r_2 = [0 \; 0 \; 1 \; 3 \; 1]$.

r_2, $r_2 = [-1 \; -2 \; 1 \; 1 \; 0]$ olarak da seçilebilir. Çünkü, satır işlemleri A matrisinin ve A′ matrisinin satır uzayını değiştirmez. A′'den A'nın satırlarını yeniden elde edebilmek mümkündür. Sonuç olarak, $[0 \; 0 \; 1 \; 3 \; 1]$ veya $[-1 \; -2 \; 1 \; 1 \; 0]$ A'nın satır uzayını span eder. Yani, A ile A′ matrislerinin satır uzayları aynıdır.

- Sütun uzayının bazları;

A ile A′'nün sütun uzayları farklıdır. Çünkü, sütun işlemleri ile A′'den A'yı elde etmek mümkün değildir. Buna göre; A matrisinin sütun uzayı,

$c_1 = [1 \; -1 \; 1]^T$ ve $c_2 = [0 \; 1 \; -3]^T$ $\longrightarrow$ PIVOTLARIN bulunduğu sütunlar

- Sıfır uzayının bazları;

d)'de elde edilen sıfır uzayından,

$s_1 = [-2 \; 1 \; 0 \; 0 \; 0]^T$, $s_2 = [-2 \; 0 \; -3 \; 1 \; 0]^T$, $s_3 = [-1 \; 0 \; -1 \; 0 \; 1]^T$ olarak elde edilir.

- Sol sıfır uzayının bazları;

d)'de elde edilen sol sıfır uzayından,

$\ell_1 = [2 \; 3 \; 1]^T$ olacaktır.

2-) $\{(t,b)\} = \{(1,-1),(2,3),(3,4)\}$ ölçümlerini en iyi temsil edebilecek doğru denklemi, $\hat{b} = C + Dt$ olarak verildiğine göre bu ölçümler için doğru denklemi sağlanacaktır.

Yani,

$$\left.\begin{aligned} C + D &= -1 \\ C + 2D &= 3 \\ C + 3D &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{b} \Rightarrow A\bar{x} = b \Rightarrow A^T A \bar{x} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \; ; \quad A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$ elde edilir ki bu durumda doğru denklemi,

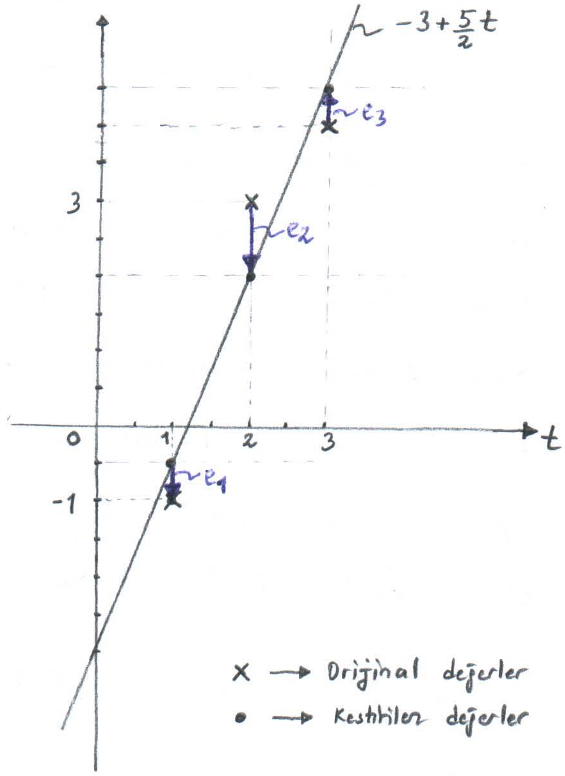
$$\hat{b} = -3 + \frac{5}{2} t$$ olacaktır.

(5p) b) $\hat{b} = -3 + \frac{5}{2}t$ denkleminden

$$\left.\begin{array}{ll} t=1 \text{ için} & \hat{b}_1 = -\frac{1}{2} \\ t=2 \text{ için} & \hat{b}_2 = 2 \\ t=3 \text{ için} & \hat{b}_3 = \frac{9}{2} \end{array}\right\} \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Hata vektörü, $e = b - \hat{b}$

$$e = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/2 \\ 2 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$



(15p) 3-)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. sütuna göre açılım yaparak determinantı hesaplamak işlem sayısını azaltmak açısından önemlidir. Çünkü, 2. sütunda 2 tane sıfır var.

$$\det(A) = |A| = (1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix} + (5)\cdot(-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot[8+\cancel{8}+6-\cancel{8}-12-4] + (-5)\cdot[9+\cancel{2}+0-0-\cancel{2}-6]$$

$$|A| = -13$$

- $\det(A) \neq 0$ olduğundan dolayı, A matrisinin rank'ı TAM'dır. Yani, $\text{rank}(A) = 4$'dür.
- A matrisinin satır ve sütunları lineer bağımsızdır. Çünkü, $\det(A) \neq 0$'dır.

4-)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

(10p) a)

$$E_{21}A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

PİVOTLAR

$$E_{32}\,E_{21}\,A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{4}{5}} \end{bmatrix} = U$$ → A matrisinin üst üçgen kısmı

$$L = \left(E_{32}\,E_{21}\right)^{-1} = E_{21}^{-1}\,E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$ → A matrisinin alt üçgen kısmı

Sonuç olarak,

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

(15p) b) A matrisinin kofaktör bileşenleri;

- $C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2$; • $C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$; • $C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$.

- $C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -2$; • $C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$; • $C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$.

- $C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$; • $C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7$; • $C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5$.

Örneğin, 3. sütuna göre matrisin determinantı,

$$|A| = a_{13}\,C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}$$

$$= 2 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad |A| = \det(A) = 4$$

Aynı sonuç pivotların çarpımından da elde edilebilir; $\det(A) = 1 \cdot \cancel{5} \cdot \frac{4}{\cancel{5}} = 4$.

Kofaktör matrisi oluşturulursa,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$ elde edilir.

Kofaktör matrisini kullanarak, A matrisinin tersi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,C^{T}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & -2 & -7 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$ olarak elde edilir.